Die Quotientenregel (Herleitung über die Produktregel)

Betrachte die Funktion: $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ Gesucht: $f'(x)$

Forme um: $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad |\cdot v(x)$

$$\Rightarrow f(x)\cdot v(x)=u(x)$$

Nach der Produktregel gilt für $u'(x)$:

$$u'(x)=f'(x)\cdot v(x)+f(x)\cdot v'(x)$$

mit: $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$

$$u'(x)=f'(x)\cdot v(x)+\frac{u(x)}{v(x)}\cdot v'(x) \qquad \left|-\frac{u(x)}{v(x)}\cdot v'(x)\right.$$

$$u'(x)-\frac{u(x)}{v(x)}\cdot v'(x)=f'(x)\cdot v(x) \qquad |:v(x)$$

$$\frac{u'(x)}{v(x)}-\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\frac{v'(x)}{v(x)}=f'(x)$$

$$\frac{u'(x)}{v(x)}\cdot\underbrace{\frac{v(x)}{v(x)}}_{Ergänzung}-\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\frac{v'(x)}{v(x)}=f'(x)$$

$$\frac{u'(x)\cdot v(x)}{\left(v(x)\right)^2}-\frac{u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}=f'(x)$$

$$\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}=f'(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{Kurzform: Für \quad f=\frac{u}{v} \quad gilt \quad f'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$$