Erweiterung des Potenzbegriffs

Erweiterung des Potenzbegriffs

Nach den Regeln der Bruchrechnung lassen sich durch den zweiten Potenzsatz auch Exponenten kleiner als 2 verstehen.

Die 1 als Exponent

Wenn der Exponent den Wert 1 annimmt lässt sich aus dem zweiten Potenzsatz folgendes ableiten:

Beispiel: $$8^5 : 8^4 = \frac{8^5}{8^4} = \frac{8 \cdot \cancel{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}}{\cancel{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}} = 8^{5-4} = 8^1$$

$$\Rightarrow \quad 8^1 = 8$$

$$\Rightarrow \text{ Allgemein gilt: } \boxed{\boxed{a^1 = a}}$$

Jede Zahl hoch EINS hat denselben Wert wie die Zahl selbst.

Die NULL als Exponent

Der zweite Potenzsatz hat zur Folge, dass der Exponent auch den Wert Null annehmen kann:

Beispiel: $$8^3 : 8^3 = \frac{8^3}{8^3} = 8^{3-3} = 8^0$$

Es gilt aber auch nach den Regeln der Bruchrechnung:

$$8^3 : 8^3 = \frac{8^3}{8^3} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{512}{512} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 8^0 = 1$$

$$\Rightarrow \text{ Allgemein gilt: } \boxed{a^0 = 1} \qquad (a \neq 0)$$

Eine Zahl hoch NULL hat den Wert 1 $(a \neq 0)$.

Negative Zahlen im Exponent

Mit dem zweiten Potenzsatz folgt:

$$8^3 : 8^5 = \frac{8^3}{8^5} = 8^{3-5} = 8^{-2}$$

Nach dem Regeln der Bruchrechnung gilt aber ebenfalls:

$$8^3 : 8^5 = \frac{8^3}{8^5} = \frac{\cancel{8 \cdot 8 \cdot 8}}{8 \cdot 8 \cdot \cancel{8 \cdot 8 \cdot 8}} = \frac{1}{8^2} \qquad \Rightarrow \quad 8^{-2} = \frac{1}{8^2}$$

$\Rightarrow$ Allgemein gilt: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \quad (a \neq 0) \qquad \boxed{a^n = \frac{1}{a^{-n}}} \quad (a \neq 0)$

Das Vorzeichen des Exponenten einer Potenz wird umgekehrt, indem man die Potenz in den Nenner eines Bruches schreibt (Zähler = 1). Dann wird ein negativer Exponent positiv und umgekehrt.

Brüche im Exponent

Welche Bedeutung ein gebrochener Exponent hat, soll durch folgende Überlegung deutlich gemacht werden:

Durch die Potenzschreibweise wird festgelegt, dass gilt:

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ Faktoren}}$$

Als erstes Beispiel soll 2^3 betrachtet werden.

Es gilt: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

Und nach dem ersten Potenzsatz: $2^3 = 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 = 2^{(1+1+1)}$

Zweites Beispiel:

Betrachte nun die Potenz: 4^1

Umgekehrt bedeutet dies aber: $4^1 = 4^x \cdot 4^x = 4^{(x+x)}$

Es gilt also (Exponentenvergleich): $1 = x + x$

Dies ist nur zu erfüllen durch: $x = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow 4^1 = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$

$4^{\frac{1}{2}}$ muss demnach die Zahl sein, die mit sich selbst multipliziert 4 ergibt.

Die Zahl $4^{\frac{1}{2}}$ wird geschrieben als $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$ und bezeichnet man als "Wurzel aus 4". Die Zahl 2 ist hierbei der Wurzelexponent und gleich dem Nenner des Exponenten bei der Potenz.

Weiterhin ergibt sich demnach:

$$4^1 = 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)} \qquad \Rightarrow 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$\sqrt[3]{4}$ wird als "dritte Wurzel aus vier" bezeichnet.

Allgemein gilt also: $\boxed{a^{\frac{1}{b}} = \sqrt[b]{a}}$

Was ändert sich nun bei Exponenten, deren Bruch im Zähler keine 1 im Zähler hat?

Betrachte das Beispiel $4^{\frac{2}{3}}$:

Nach dem ersten Potenzsatz gilt: $4^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}$

Da aber hier zwei gleiche Faktoren $\left(4^{\frac{1}{3}}\right)$ miteinander multipliziert werden, kann man auch als Potenz schreiben:

$$4^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = \left(4^{\frac{1}{3}}\right)^2$$

Dies ist auch durch den fünften Potenzsatz zu begründen.

Demnach muss gelten: $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$

In unserem Beispiel bedeutet das: $4^{\frac{2}{3}} = \left(4^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4^{\frac{1}{3}\cdot 2}$

Weiterhin gilt: $4^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}\cdot 2} = 4^{2\cdot\frac{1}{3}}$

Also muss nach dem 5. Potenzsatz gelten: $4^{\frac{2}{3}} = \left(4^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(4^2\right)^{\frac{1}{3}}$

Und mit $a^{\frac{1}{b}} = \sqrt[b]{a}$ bedeutet das: $4^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{4^2}$

Es gilt also allgemein: $\boxed{a^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}}$

http://mathematik-sek1.jimdo.com