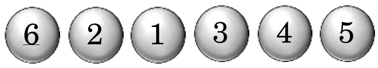
Stochastik (5) Kombinatorik

Direkte Wahrscheinlichkeitsbestimmung: Abzählen der Möglichkeiten

Unterscheide: Permutationen, Variationen und Kombinationen

① Permutationen:

Aus einer Reihe von n verschiedenen Elementen werden alle möglichen Anordnungen gesucht.

Bsp. 6 Kugeln, eine Anordnung wäre: 

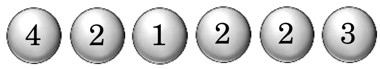
→ (6;1;2;3;4;5)

Die Anzahl der möglichen Anordnungen (=*Permutationen*) ergeben sich zu:

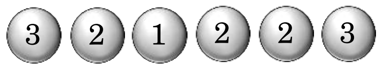
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \longrightarrow \text{symbolisch: } n!$$

Bsp.: Die sechs Kugeln lassen sich auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ *verschiedene Arten anordnen.*

$\longrightarrow$ Die Anzahl vermindert sich, wenn sich a gleiche Elemente unter den Elementen befinden: $\dfrac{n!}{a!}$



$\longrightarrow$ Die Anzahl vermindert sich weiter, wenn sich zudem noch b gleiche Elemente einer anderen Art unter den Elementen befinden: $\dfrac{n!}{a! \cdot b!}$ etc.



② Variationen:

❶ Aus einer Reihe von n verschiedenen Elementen sollen r Elemente (**<u>mit</u>** Zurücklegen) gezogen werden. Die Reihenfolge <u>soll</u> dabei berücksichtigt werden.

Anzahl : n^r

❷ Aus einer Reihe von n verschiedenen Elementen sollen r Elemente (**<u>ohne</u>** Zurücklegen) gezogen werden. Die Reihenfolge <u>soll</u> dabei berücksichtigt werden.

Anzahl : $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(r-1)) \quad =\dfrac{n!}{(n-r)!}$

Bsp.: „6 aus 49“ unter Berücksichtigung, dass die Reihenfolge zu beachten wäre.

③ Kombinationen:

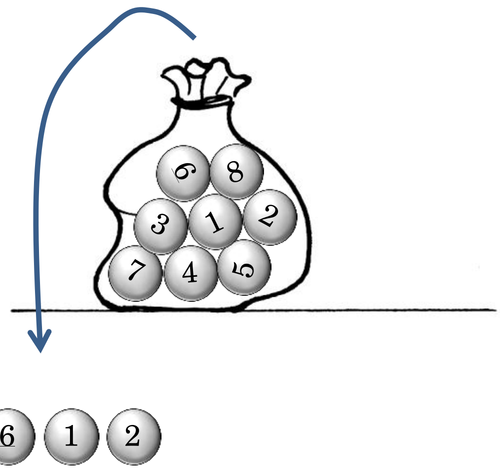
❶ Aus einer Reihe von n verschiedenen Elementen sollen r Elemente (ohne Zurücklegen) gezogen werden. Die Reihenfolge <u>soll dabei nicht</u> berücksichtigt werden.

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(r-1))}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}=\binom{n}{r} \quad \rightarrow$$

("n über r")

(Binomialkoeffizient)

Bsp 1.: Aus einem Beutel mit 8 Kugeln werden drei Kugeln gezo gen. Gewonnen hat, wer die richtigen Kugeln (<u>ohne</u> Beachtung der Reihenfolge) getippt hat.



$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\cdot(8-3)!}=\frac{8!}{3!\cdot(5)!}=56$$

$\rightarrow$ *Gewinnchance: 1:56*

*Bsp 2.: **<u>Lotto 6 aus 49</u>**: Anzahl der Kombinationen:* $\binom{49}{6}=\dfrac{49!}{6!\cdot(49-6)!}=13983816$

$\rightarrow$ *Gewinnchance: 1:13983816*

❷ Aus einer Reihe von n verschiedenen Elementen sollen r Elemente (mit Zurücklegen) gezogen werden. Die Reihenfolge <u>soll dabei nicht</u> berücksichtigt werden.

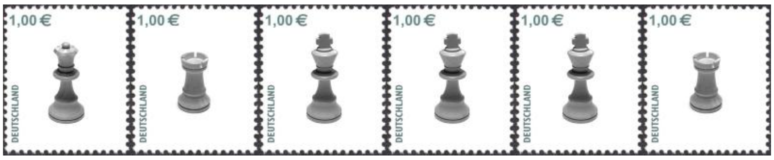
$$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+(r-1))}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot r}=\frac{(n+(r-1))!}{r!\cdot(n-1)!} \qquad \left[\triangleq\binom{n+r-1}{n-1}\right]$$

Erläuterung zur Formel: r aus n Elementen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

Die Gültigkeit der Formel lässt sich an einem Beispiel erklären:

Ein Brief soll mit 6 € frankiert werden. Es stehen drei Sorten von 1€-Briefmarken zur Verfügung: (**D**ame, **T**urm, **K**önig)

Die Briefmarken werden in einer Reihe aufgeklebt. Dabei ist die Reihenfolge nicht von Bedeutung. Eine Möglichkeit wäre:

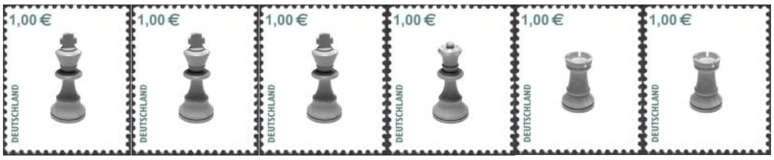


(DTKKKT)

Oder: 

(KDTKTK)

Man kann die Marken folglich auch **sortieren**. Vereinbarung: Erst die K-Marken, dann die D-Marken und am Ende die T-Marken



(KKKDTT)

Wir verwenden nun für die verschiedenen Möglichkeiten eine spezielle Schreibweise und vereinbaren, dass immer bei einem Wechsel der Sorte oder wenn eine Sorte fehlt, ein * geschrieben wird.
⟶ z.B.: KKK*D*TT oder K*DDD*TT oder *DDDDDD* oder KKKKKK**

Es werden also immer acht Variablen benötigt, zwei davon sind immer *.

⟶ Die jeweilige Kombination ist dann eindeutig festgelegt, sobald man die *-Positionen kennt (z.B. [4|6] oder [2|6] oder [1|8] oder [7|8]) ! Die Anzahl dieser Kombinationen (2 aus 8 ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge) berechnet sich nach „n über r", also hier „8 über 2":

$\binom{8}{2} = 28$ ⟷ Ziehe 5 (r) aus 3 (n) Elementen (mit Zurücklegen, ohne auf die Reihenfolge zu achten).

Allg. gilt also für die Anzahl der Kombinationen: $\boxed{\binom{n+r-1}{n-1}}$, d.h.: Aus n Elementen werden r <u>mit</u> Zurücklegen gezogen, <u>ohne</u> auf die Reihenfolge zu achten.